Universidad Simón Bolivar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.
Julio –Septiembre 2012

Nombre:____________________________
Carnet:______________ __ Sección:______

3er. Parcial de Matemáticas III. Tipo A (35%) **¡Justifique todas sus respuestas!**

1. (9 puntos) Con el producto interno usual para $\Re^3$
   a) Aplique el proceso de Gram-Schmidt al conjunto $\{(2,-2,1),(1,0,1),(1,0,0)\}$ de $\Re^3$ para hallar una base ortonormal de $\Re^3$.
   b) Sea $H = gen\{(2,-2,1)\}$. Exhiba una base ortonormal de $H^{\perp}$.
   c) Halle la proyección de $v = (1,1,1)$ sobre H.

Solución:

a) $\|v_1\| = \sqrt{2.2+(-2)(-2)+1.1} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$v_2' = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{3}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\|v_2'\| = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow u_2 = v_2'$$

$$v_3' = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4/9-1/9 \\ 4/9-2/9 \\ -2/9-2/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 \\ 2/9 \\ -4/9 \end{pmatrix}$$

$$\|v_3'\| = \sqrt{\frac{16}{81}+\frac{4}{81}+\frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

b) $H^{\perp} = gen\left\{\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}\right\}$

c) $\Pr oy_H v = \langle v, u_1 \rangle u_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. (9 puntos) Sea $T : P_2 \to \Re^2$ una transformación lineal definida por:

$$T\left(at^2 + bt + c\right) = \begin{pmatrix} a-b+c & 2b-a \\ 0 & -c-b \end{pmatrix}$$

a) Halle A_T, la matriz de la transformación asociada a la base canónica de P_2.
b) Halle una base para el núcleo de T, y la nulidad de T.
c) Halle una base para la imagen de T, y el rango de T.

Solución:

a) $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ a-b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-c \\ a=-2c \end{cases}$

$-2ct^2 - ct + c = c\left(-2t^2 - t + 1\right)$

$nuT = gen\left\{-2t^2 - t + 1\right\}, \nu(T) = 1$

c) $imagenT = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}, \rho(T) = 2$

3. (9 puntos) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Halle los autovalores de A.
b) Halle los autovectores asociados a los autovalores de A.

c) De ser posible, encuentre D y B tal que $D = B^{-1}AB$.

Solución:

a) $$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(2-\lambda)^2$$

b) Para λ = 3.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = z = 0 \Rightarrow E_3 = gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Para λ = 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2x + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3x + y \\ w = -2x \end{cases} \Rightarrow E_2 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

c) $$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. (8 puntos) Sea $T : \Re^3 \to P_2$, tal que $T(a \quad b \quad c) = (a-b)x^2 + (-a+2b-c)x + c - b$
   a) Halle la matriz de la transformación, A_T, asociada a la base canónica.
   b) Halle los autovalores de A_T.
   c) Halle la norma de los elementos de la imagen de T, usando que $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$

Solución:

a) $$A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[2-3\lambda+\lambda^2-1\right]-1+\lambda$$

b) $= 2-3\lambda+\lambda^2-1-2\lambda+3\lambda^2-\lambda^3+\lambda-1+\lambda = -\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda$

$\lambda = 0, \lambda = 2$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow imagenT = gen\{t^2-t, -t^2+2t-1\}$

$$\left\|t^2-t\right\|^2 = \int_0^1 \left(t^4-2t^3+t^2\right)dt = \frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{1}{30} \Rightarrow \left\|t^2-t\right\| = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

$$\left\|-t^2+2t-1\right\|^2 = \int_0^1 \left(t^4-4t^3+6t^2-4t+1\right)dt = \frac{1}{5}-1+2-2+1 = \frac{1}{5} \Rightarrow \left\|t^2-t\right\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Universidad Simón Bolivar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.
Julio –Septiembre 2012

Nombre:____________________________
Carnet:______________ __ Sección:______

3er. Parcial de Matemáticas III. Tipo B (35%) **¡Justifique todas sus respuestas!**

1. (9 puntos) Dado el producto interno para polinomios en P_2, $\langle p, q\rangle = \int_0^1 xp(x)q(x)dx$
   a) Si $H = gen\{x, x^2\}$, halle una base ortonormal para $H^{\perp}$.
   b) Halle $\|x\|$.
   c) Halle los valores de k, para que $p(x) = kx^2 + x$ sea ortogonal a $q(x) = 3$.

Solución:

$$\langle ax^2 + bx + c, x\rangle = \int_0^1 (ax^4 + bx^3 + cx^2)dx = \frac{ax^5}{5} + \frac{bx^4}{4} + \frac{cx^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{3}c = 0$$

a) $$\langle ax^2 + bx + c, x^2\rangle = \int_0^1 (ax^5 + bx^4 + cx^3)dx = \frac{ax^6}{6} + \frac{bx^5}{5} + \frac{cx^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}a + \frac{1}{5}b + \frac{1}{4}c = 0$$

$$H^{\perp} = gen\left\{\frac{5}{2}x^2 - \frac{10}{3}x + 1\right\}$$

$$\left\|\frac{5}{2}x^2 - \frac{10}{3}x + 1\right\|^2 = 1$$

b) $$\langle x, x\rangle = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

c) $$\langle kx^2, 3\rangle = \int_0^1 3kx^2 dx = kx^3\Big|_0^1 = k = 0$$

2. (9 puntos) Sea $T : M_{22} \to \Re^3$ una transformación lineal definida por:

$$T\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - v + y \\ u + v + y \\ x - y + u \end{pmatrix}$$

   a) Halle la matriz asociada a la transformación en la base canónica.
   b) Halle una base para el núcleo de T, y la nulidad de T.
   c) Halle una base para la imagen de T, y el rango de T.

Solución:

a) $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

b)

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-4y=0 \Rightarrow x=2y \\ v+x-2y=0 \Rightarrow v=0 \\ u-v+y=0 \Rightarrow u=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} y \Rightarrow nuT = gen\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \nu(T)=1$$

c) $imagenT = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \Re^3, \rho(T)=3$

3. (9 puntos) Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}$

a) Halle los autovalores de A.

b) Halle los autovectores asociados a los autovalores de A.

c) De ser posible, encuentre D y B tal que $D = B^{-1}AB$.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 6-\lambda & 6 \\ 3 & 6 & 11-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 20\lambda^2 - 68\lambda + 64 = (\lambda-2)^2(\lambda-16)$

b) Para λ=16.

$$\begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 \\ 2 & -10 & 6 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -13 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & -63 & 42 \\ 0 & 21 & -14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7y-2z=0 \Rightarrow y=\frac{2}{7}z \\ x-5y+3z=0 \Rightarrow x=\frac{11}{7}z \end{cases} \Rightarrow E_{16} = gen\left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Para λ = 2.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x=-2y-3z\Rightarrow E_2=gen\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

c) $D=\begin{pmatrix}16&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}11&-2&-3\\2&1&0\\7&0&1\end{pmatrix}$

4. (8 puntos) Sea $T:P_2\rightarrow\Re^3$, tal que $T\left(at^2+bt+c\right)=\begin{pmatrix}7a-2b-4c\\3a-2c\\6a-2b-3c\end{pmatrix}$.

   a) Halle la matriz de la transformación, A_T, asociada a la base canónica.
   b) Halle los autovalores de A_T.
   c) Halle una base ortonormal del núcleo de T.

Solución:

a) $A_T=\begin{pmatrix}7&-2&-4\\3&0&-2\\6&-2&-3\end{pmatrix}$

b)

$$\begin{vmatrix}7-\lambda&-2&-4\\3&-\lambda&-2\\6&-2&-3-\lambda\end{vmatrix}=(7-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&-2\\-2&-3-\lambda\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3&-2\\6&-3-\lambda\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}3&-\lambda\\6&-2\end{vmatrix}$$

$$=(7-\lambda)\left[3\lambda+\lambda^2-4\right]+2\left[-9-3\lambda+12\right]-4\left[-6+6\lambda\right]$$

$$=21\lambda+7\lambda^2-28-3\lambda^2-\lambda^3+4\lambda+6-6\lambda+24-24\lambda$$

$$=-\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2=(1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

c)

$$\begin{vmatrix}7&-2&-4\\3&0&-2\\6&-2&-3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&-2\\6&-3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}7&-4\\3&-2\end{vmatrix}=2[-9+12]+2[-14+12]=6-4=2\neq 0$$

$$nuT=\{\vec{0}\}$$